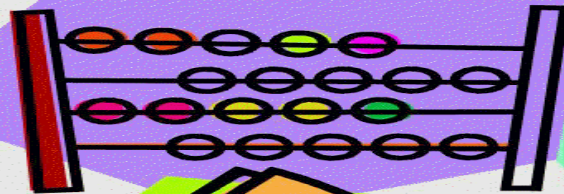


Итоги Олимпиады по математике

«АНТОК-2022»

5-7 классы



Задание № 1 (2 балла)

- ▶ Географы спорят, является ли Каспийское море озером, но если это так, то это – самое большое озеро в мире с площадью 371 000 квадратных километров. Известно, что в гектарах измеряют недвижимость, особенно земельные участки. Один гектар равен 10 000 квадратных метров. Он используется со времен Французской революции, и применяется в некоторых регионах.
- ▶ ***Сколько гектар занимает Каспийское море? А чтобы точнее ответить на этот вопрос переведите его площадь в квадратные метры.***

Решение.

- ▶ $1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$, $1 \text{ кв. км} = 1000 * 1000 \text{ кв. м} = 1\ 000\ 000 \text{ кв. м}$
- ▶ **$371\ 000 \text{ кв. км} = 371\ 000\ 000\ 000 \text{ кв. м} = 37\ 100\ 000 \text{ гектар}$**



Задание № 2 (3 балла)

Иногда бывает трудно придумать пароль к своему телефону. Один мой знакомый заменил каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 511533. **Как его зовут?**

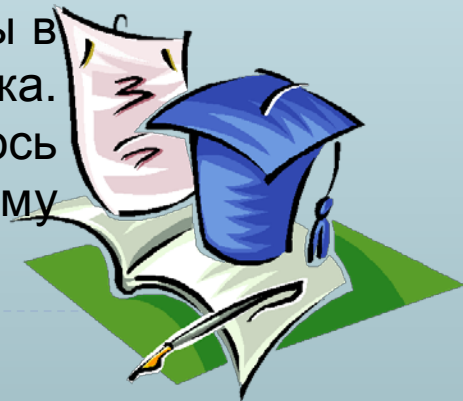
Подсказка: имя уменьшительно-ласкательное, а потому долго думать вам не придется. А пароль лучше не сообщать никому!!! Да, сейчас наиболее важные сервисы используют двухфакторную авторизацию. Даже узнав твой пароль, мошенник не войдет в учетку, так как вход надо подтвердить кодом, который пришел по смс на твой телефон.

Решение.

Число 511533 нужно разбить на однозначные и двузначные числа, чтобы соответствующая последовательность букв образовывала имя. Первое число 5, т.е. первая буква "Д". Последнее число 33, поскольку иначе два последних числа 53 и 3 или 3 и 3, но 53-й буквы в алфавите нет, а на "вв" не может кончаться имя мальчика. Значит, последняя буква "я". На средние буквы осталось сочетание 115, т.е. либо 1, 1, 5, либо 11, 5, либо 1, 15. Этому соответствуют наборы букв "аад", "йд" и "ан".

Отсюда видно, что мальчика зовут Даня.

Ответ. Даня.



Задание № 3 (3 балла)

По преданию, сестры Марина (известный поэт серебряного века) и Анастасия Цветаевы часто угощали своих гостей ароматным пирогом с песочной основой и фруктовой начинкой — отсюда и название этого нежного летнего десерта. Взять вместо малины можно любые ягоды, как замороженные, так и свежие, можно так же взять фрукты. Для пирога на 10 человек следует взять одну сотую часть берковца малины.

Считайте, что 1 берковец равен 164 кг и рассчитайте сколько нужно взять малины для половины порции, т.е. на 5 гостей.

Решение.

Если на 10 человек нужно взять $1/100$ берковца, то на одного человека приходится $1/1000$ берковца. Соответственно для 5-х человек имеем $5/1000$ берковца. В задаче сказано, что 1 берковец равен 164 кг. Таким образом, для 5-ти человек нужно взять $5/1000 \cdot 164 = 820/1000$ кг или равно 820 г.

2-ой способ

Переведем 164 кг в граммы. $164 \text{ кг} = 164\,000 \text{ г}$. На 10 человек надо во 100 раз меньше, т.е. 1 640 г. На 5 человек в 2 раза меньше, чем на 10 человек: $1\,640 : 2 = 820$ грамм

Ответ. 820 грамм.



Задание № 4 (3 балла)



При посадке на трамвайчик на канатной дороге в горах важно не допустить перегрузки. Поэтому распределить по группам для посадки в трамвай ожидающих в очереди пассажиров необходимо равномерно. Но некоторые семьи с детьми не могут войти вместе в трамвай и просят посадить их на следующий, чтобы не разлучаться и ехать вместе. Но тут возникает необходимость заполнить места достаточно плотно, оптимальным образом. Работник канатной дороги смог распределить людей по трамваям равномерно — таким образом, чтобы количество людей в любых двух группах отличалось не более чем на 1. В результате такого равномерного деления получилось 6 групп людей для 6-ти трамваев, среди которых ровно 4 группы по 13 человек.

Сколько человек в очереди всего могло быть? Укажите все возможные варианты.

Решение.

Так как количество людей в группах отличается не более, чем на 1, то в оставшихся двух группах может быть по 12 или по 14 человек (ясно, что групп из 12 и 14 человек одновременно быть не может). Значит, общее количество человек может быть равно $13 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 76$ или $13 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 80$.

Ответ. 76 или 80.

Задание № 5 (4 балла)

В танце Настя, Алиса, Юля, Яна, Маша, Вика должны взяться за руки и образовать круг. Хореограф сказал, чтобы девочки сами выбрали место, кто с кем окажется рядом. Маша встала рядом с Юлей, справа от неё, Яна встала напротив Вики, Вика встала рядом с Машей, Настя и Яна не захотели стоять рядом.

Кого взяла за руки Алиса?

Решение.

Из первого и третьего утверждения следует, что, Юля, Маша, Вика стоят именно в таком порядке против часовой стрелки. Поскольку девочки встали в круг и всего в круге шесть человек, то напротив Вики, то есть слева от Юли, стоит Яна. Остались Настя и Алиса. Поскольку Настя и Яна не стоят рядом, то слева от Яны стоит Алиса, а слева от Алисы – Настя. Получается такое расположение:

	Алиса	
Яна		Настя
Юля		Вика
	Маша	

Ответ. Рядом с Алисой – Настя и Яна.



Задание № 6 (4 балла)

Петя с дедушкой задумывали разные числа и каждый пытался, исходя из определенных условий, отгадать это число. Петя попросил дедушку **отгадать наименьшее число, у которого все цифры различны, а сумма всех цифр равна 32.**

Решение.

У четырёхзначного числа из различных цифр наибольшая возможная сумма цифр равна $9 + 8 + 7 + 6 = 30 < 32$, поэтому нужное нам число минимум пятизначное.

Постараемся сделать первую цифру как можно меньше. Ясно, что она не меньше 2. Поставим на первое место 2. Сумма оставшихся четырёх цифр 30, её можно получить только как $9 + 8 + 7 + 6$. Самую маленькую из этих цифр 6 ставим на второе место, следующую по величине цифру 7 — на третье место, 8 — на четвёртое, 9 — на пятое.

Ответ. 26789



Задание № 7 (4 балла)

Получилась такая ситуация: играя в игры с внуком Петей, дедушка, в свою очередь, написал 5 целых положительных чисел, идущих друг за другом. Затем посчитал сумму первых трех чисел из получившегося ряда. Получил 60.

А что получится если из этих чисел сложить три последних? Какое число стоит в середине этой цепочки из пяти чисел?

Решение.

Пятое число на 4 больше первого, а четвёртое — на 2 больше второго. Тогда сумма трёх самых больших чисел на $2 + 4 = 6$ больше суммы трёх самых маленьких, и она равна $60 + 6 = 66$.

Ответ: 66. Числа –19, 20, 21, 22, 23 Число 21 стоит в середине цепочки.



► *Задание № 8 (4 балла)*



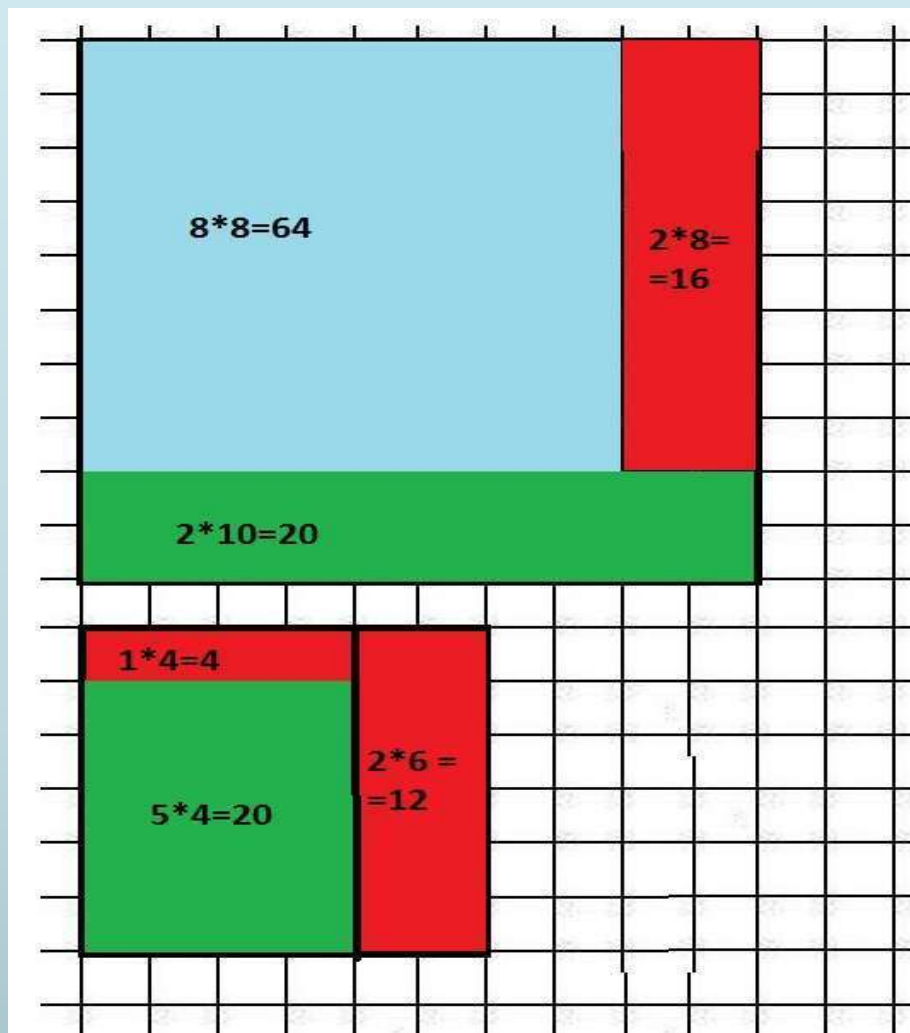
Алисе подарили разноцветный кубик Рубика с раскрашенными цветными гранями. У девочки никак не получалось вначале его собрать, видимо, она была еще мала для этого. Тогда Алиса решила потренироваться и сделала квадрат со стороной 10 см. Затем из квадрата со стороной 10 см вырезала квадрат со стороной 8 см. Оставшийся кусок она разрежала на единичные квадратики (со стороной 1 см). И далее из них Алиса хочет сложить новый квадрат. **Чему будет равна его сторона?**

Решение.

Было в квадрате $10 \cdot 10 = 100$ квадратиков. Вырезали квадрат $8 \cdot 8 = 64$ квадратика. Осталось $100 - 64 = 36$ – квадратиков. Если посмотреть на рисунок, то у нас получилось 16 (выделены красным цветом) плюс 20 (выделенных на рисунке зеленым цветом квадратиков) со стороной равной 1. Итого, $20 + 16 = 36$ квадратиков со стороной 1. Сторона нового квадрата $S = a \cdot a = 36$. Сторона нового квадрата $a = 6$.

Ответ. Сторона $a = 6$.

► *Решение задания № 8*



**ФОКУС
ДЛЯ
ДРУЗЕЙ**



▶ ***Задание № 9 (6 баллов)***

Чтобы было удобнее ездить на маршрутке и пить кофе в автомате, одна женщина пришла в пункт размена, чтобы обменять несколько 50- и 100 бумажных купюр на железные монеты. Ей было выдано 199 монет достоинством 1 и 5 рублей. ***Такое возможно? Или ей необходимо все тщательно пересчитать и убедиться, что выдали все монеты и не ошиблись в их числе.***

А вот случай, описанный в советское время в одной газете. Пишет кондуктор трамвая. Поводился в ее трамвае ездить безбилетник. В то время проезд в трамвае стоил 3 копейки. Так вот, это пассажир достает 100 рублей и «хочет оплатить» проезд. Кондуктор естественно возмущается, требует мелочь, а у пассажира нет. Он говорит: «Я же не отказываюсь платить, плачу вполне законным платежным средством – 100-рублевой купюрой, с гербом, с серпом и молотом. Где-нибудь написано, что я не имею права платить такой купюрой». Естественно, кондуктору остается только махнуть рукой. Ну поездил он так недели две. Надоело это кондуктору... И вот, в очередной день, когда пассажир протягивает ей сторублевую купюру, она молча берет ее, кладет в сумку, и показывает пассажиру на мешок с мелочью (по 1, 2 и 3 копейки). "Вот здесь ровно 99 рублей 97 копеек. Забирайте." Пассажир естественно, возмущается. А кондуктор ему: «А что, я же даю Вам сдачу, вполне законными платежными средствами, с гербами, с серпом и молотом». Пришлось тому пассажиру взять этот мешок с мелочью. (монеты достоинством 1, 2, 3 копейки весили ровно по 1, 2 и 3 грамма, так что 99 рублей 97 копеек весили....???) ***Посчитайте сколько это будет в граммах и приблизительно в килограммах, округлите до ближайшего целого числа килограммов).***



► *Решение задания № 9*

Для решения этой задачи необходимо воспользоваться следующим известным утверждением: сумма любого числа четных чисел – четная, а нечетного числа нечетных чисел – нечетная. В нашем случае исходная сумма денег (сумма какого-то числа 50- и 100-бумажных купюр) – четная, а полученная сумма денег (сумма 199 монет по 1 и 5 рублей) – нечетная.

В описанном случае монеты достоинством 1, 2, 3 копейки весили ровно по 1, 2 и 3 грамма, так что 99 рублей 97 копеек весили 9997 граммов или 9 кг 997 г (или примерно 10 кг).



Задание № 10 (6 баллов)

Для составления кода защиты информации необходимо посчитать **сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр «5», «0», «7» и «8»?** Заметим, что криптограф решил, что 0 не может быть первой цифрой в задуманном числе.

Решение. 0 не может быть первой цифрой в задуманном числе. Соответственно наше число будет начинаться либо с 5, либо с 7, либо с 8 (т. е. 3 варианта). В каждом из этих вариантов нам надо расставить 3 числа без повторений, потому что в каждом варианте первая цифра числа уже занята, а 0 и еще две цифры в каждом варианте четырехзначного числа еще можно переставлять, не повторяясь. У нас получится 6 вариантов: поставили одну цифру на первое место – это 3 способа выбора этой цифры, вторую цифру в числе можно тогда выбрать 2-мя способами, третью одним способом. Всего получается $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов перестановки цифр в числе. Далее просто умножаем количество вариантов – 3 на 6. т. е. $3 \cdot 6 = 18$.

Ответ. 18.



Задание № 11 (8 баллов)

При переплавке драгоценных металлов необходимо рассчитать массу украшения по имеющимся у ювелира данным. 2% массы первого кольца составляет золото, доля золота в массе второго кольца составляет 16%. Масса второго украшения больше массы первого на 9 г. Эти два кольца переплавили и получили третье кольцо, 12 % массы которого составляет золото.

Найдите массу третьего кольца. Ответ дайте в килограммах.



► *Решение задания № 11*

Решение.

Пусть m – масса первого кольца, m г, а масса второго кольца – $m+9$ г. Тогда масса третьего равна – $m+m+9=2m+9$ г. Одно кольцо содержит 2% золота, второе – 16% золота. Таким образом, золота в третьем кольце будет $12/100 \cdot (2m+9)$, что равно сумме массы золота, содержащегося в первом кольце плюс масса золота, содержащегося во втором кольце. Это будет равно $2/100 \cdot m$ (золота в первом кольце) + $16/100 \cdot (m+9)$ (золота во втором кольце). Получаем уравнение:

$$12/100 \cdot (2m+9) = 2/100 \cdot m + 16/100 \cdot (m+9)$$

Умножим обе части уравнения на 100. Получим

$$12 \cdot (2m+9) = 2 \cdot m + 16 \cdot (m+9).$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$6 \cdot (2m+9) = m + 8 \cdot (m+9).$$

Раскроем скобки:

$$12m + 54 = m + 8m + 72$$

Слагаемые с m переносим в одну сторону, без m – в другую.

$$12m - m - 8m = 72 - 54$$

$$3m = 18$$

$$m = 18/3 = 6 \text{ (6 г – масса первого кольца).}$$

Нам надо найти массу третьего – $2m+9=2 \cdot 6+9=12+9=21$ г = 0,021 кг

Ответ. 0,021 кг.



► *Задание № 12 (8 баллов)*



В житейском плане слово «последовательность» вопросов, как правило, ни у кого не вызывает. Это длинное слово всего лишь означает, что что-то следует за чем-то. Например, последовательность действий, последовательность событий, последовательность дней недели, времён года и так далее. Или, когда кто-то следует за кем-то. Например, последовательность людей в очереди. Из чего состоит любая последовательность? Тут тоже всё логично. Если идёт речь о последовательности дней календаря, то из дней, если об очереди покупателей на кассе, то – из покупателей. И так далее. Но... математика – наука строгая. По законам природы устроена. И работает со всеми объектами сразу. Поэтому ей должно быть без разницы, что (или кто) под этими объектами скрывается – дни, покупатели, спортсмены, коровы, свиньи... Для неё всё едино: последовательность – и всё тут. Например, если идёт речь о последовательности календарных месяцев, то январь – член этой последовательности. И июнь – член. И ноябрь – тоже член, да.) Математика, как правило, работает с числовыми последовательностями. Что это за зверь? Всё просто, как в сказке. Это последовательность, членами которой являются числа. Совершенно любые!

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, отличается от предыдущего члена на одну и ту же величину – разность арифметической прогрессии d .

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на одну и ту же величину (знаменатель геометрической прогрессии q).

Итак, задача

Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии со знаменателем равна 2541. Найдите первый член этой геометрической прогрессии b_1 . Какова будет сумма арифметической прогрессии пяти первых ее членов, если у нее первый член будет таким же, как у геометрической $a_1=b_1$, а разность также будет равна $d=q=3$.



Решение.

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 2541 \text{ или } b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 = 2541, \text{ т.е.} \\ b_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 2541.$$

Подставим $q=3$ и найдем b_1 .

$$\text{Получим } b_1(1 + 3 + 9 + 27 + 81) = 2541. \text{ Отсюда } b_1 = 2541/121 = 21.$$

Найдем члены арифметической прогрессии. Мы уже знаем, что первый член $a_1 = b_1 = 21$. Второй будет равен $a_2 = a_1 + d = 21 + 3 = 24$.

Третий член арифметической прогрессии будет равен $a_3 = a_2 + d = 24 + 3 = 27$.

Четвертый член равен $a_4 = a_3 + d = 27 + 3 = 30$.

Пятый член равен $a_5 = a_4 + d = 30 + 3 = 33$.

Найдем сумму пяти членов $S = 21 + 24 + 27 + 30 + 33 = 135$.

Ответ. Первый член этой геометрической прогрессии $b_1 = 21$.

Сумма пяти первых членов арифметической прогрессии равна 135.

**Спасибо
за внимание!**

