



Итоги Олимпиады по
математике «АНТОК-2021»



5-7 классы

Задача № 1 (2 балла)

Мальчики играли на большой перемене в шашки. Их было 4 из класса. Каждый из них с каждым за время перемены успел сыграть по две партии.

Сколько всего партий в шашки всеми мальчиками было сыграно на перемене?

Решение.

Сыграли всего 4 человека, каждый с каждым из трех мальчиков сыграл $3 * 2 = 6$ партий

Итого $4 * 6 = 24$ партии на всех мальчиков.

В каждой партии участвуют 2 человека, поэтому $24 : 2 = 12$ партий было сыграно на перемене.

Ответ. 12



Совет: «Используйте принцип «От простого к сложному», т.е. если у вас не получаются сложные примеры, то попробуйте сперва порешать более простые примеры».

Задача № 2 (3 балла)

Произведение двух чисел равно 2520. Одно число заканчивается нулём. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найди эти числа.

Решение.

Возможные варианты находим методом подбора. Берем 12, просто подряд идущие цифры, тогда другое число будет 210.

Умножаем 12 на 210 и получаем 2520: $12 \cdot 210 = 2520$.

А также, если приписать 0 к 12, то первое число будет 120, а второе – 21. Умножаем и получаем 2520: $120 \cdot 21 = 2520$.

Берем 130 и 31 умножаем и получаем 4030

Любые другие произведения получаются *еще больше*.

Ответ. 120 и 21 или 210 и 12



Запомните, ученики, которые хорошо владеют техникой устного счета, в дальнейшем лучше учатся.

Задача № 3 (3 балла)



Четверо ребят: Рита, Павел, Саша и Катя – отправились в зоомагазин. Каждый из них выбрал себе питомца: рыбку, попугая, собачку и кошечку.

Какого питомца выбрал себе каждый из ребят, если:

1. Ни у одного из ребят первая буква имени не совпадает с названием животного.
2. У Павла аллергия на кошек.
3. Сашин питомец не живет в воде и не умеет летать.
4. Катя выбрала животное, чтобы после дрессировки оно охраняло дом.

Решение.

У Кати – собачка, это ясно. У Саши не живет в воде – не рыбка и не летает - не попугай и не собачка, потому что собачка у Кати. Значит у Саши – кошечка, потому что и у Павла ее не может быть (аллергия) и у Кати – ее имя на букву К (этого не может быть). У Риты не может быть рыбки (на одну букву), значит – она у Павла, а у Риты – попугай.

Ответ. У Риты попугай, у Павла рыбка, у Саши кошечка, у Кати собачка.

Задание 4. (3 балла)

Периметр квадрата 120 дм. Квадрат разделили на три равных прямоугольника, затем каждый прямоугольник разрезали пополам, найдите сумму площадей полученных 6 прямоугольников в квадратных метрах.

Решение.

$120:4=30$ дм сторона квадрата,

Затем получили три прямоугольника 30 дм на 10 дм,

Затем, после деления пополам, получили прямоугольника 30 дм на 5 дм,

Площадь такого прямоугольника $300*50=15000$ дм кв.

Их всего 6 таких маленьких прямоугольников

$15000*6=90000$ дм кв.=9 кв. м

Ответ. 9 кв. м





Задание 5. (2 балла)

Гандбольная команда сыграла 4 матча, вогнав в ворота противоположной стороны 5 мячей и пропустив 2 мяча.

1 из матчей она выиграла, 1 свела вничью, 2 проиграла.

С каким счётом закончился каждый матч?

Ответ.

Пропущенные мячи были в проигранных матчах.

Потому что в двух проигрышных матчах пропущено 2 мяча. Т.е. в каждом проигранном матче пропущен 1 мяч.

Эти матчи закончились со счётом 0:1. Других пропущенных мячей не было. Значит, ничейный матч закончился со счётом 0:0 Выигранный матч закончился со счётом 5:0.



Задание 6 (4 балла)

Делится ли число $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 101 - 1$ на 10?

Решение. Если на конце у всех множителей стоят 1, то произведение тоже будет оканчиваться на 1. Значит последняя цифра уменьшаемого равна 1 и если из него вычесть один, следовательно, разность будет оканчиваться на 0.

Ответ: число делится на 10

Задание 7 (5 баллов)



На книжной полке можно разместить либо 12 одинаковых толстых книг, либо 28 тонких книг. Можно ли разместить на этой полке 9 толстых книг и 10 тонких?

Ответ.

1 шаг. Заметим, что и 12 и 28 делятся на 4

$$12 : 4 = 3(\text{к}) \text{ толстых}$$

$$28 : 4 = 7(\text{к}) \text{ тонких}$$

2 шаг: обратить внимание на то, что 3 толстые книги занимают столько же места сколько 7 тонких

3 шаг. Вывод: на 9 толстых книг надо столько же места, сколько для $7 \cdot 3 = 21$ тонких.

Следовательно, нельзя будет поставить 9 толстых книг и 10 тонких (максимум 7 тонких)

Ответ. Нельзя разместить

Задание 8 (6 баллов)

1. Гувернантка ежедневно приходила в одно и то же время на остановку и за ней посылали водителя на машине, чтобы подвезти гувернантку к дому ученика. Однажды девушка подошла на 45 мин раньше обычного времени на остановку и решила пойти к дому ученика пешком навстречу машине, чтобы прийти пораньше. Машина ее встретила, когда она уже прошла часть пути к дому и занятие началось на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость девушки меньше скорости автомобиля, который ее встречал?



Ответ. За 10 мин машина проходит путь, равный двойному расстоянию от остановки до места встречи девушки с машиной.

Значит, путь от остановки до места встречи машина проходит за 5 мин. И значит, на месте встречи машина была за 5 мин до времени обычного прихода девушки на остановку, значит, путь от остановки до места встречи девушка шла $45 \text{ мин} - 5 \text{ мин} = 40 \text{ мин}$.

Следовательно, скорость девушки в $40 : 5 = 8$ раз меньше скорости машины. Так как на одно и то же расстояние от места встречи до остановки девушке требуется 40 минут. А машине – 5 минут.



Ответ. В 8 раз

Задание 9 (7 баллов)



В русских народных сказках у Змея Горыныча одна, две или три головы:

- а) Может ли у 40 % змеев быть 60 % голов?
- б) Может ли у 40 % змеев быть 80 % голов?

Решение. а) Покажем, что у 40% змеев может быть 60 % голов. Просто допустим, что это верно и приведем такой пример. Пусть в этом царстве живет 100 змеев: 40 змеев с одной головой, 20 – с двумя головами и 40 – с тремя.

Тогда число голов у всех драконов равно

$$40 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 200.$$

При этом все 40 трехглавых змеев, что составляет 40 % от общего числа змеев, имеют $40 \cdot 3 = 120$ голов, что составляет

$$120/200 \cdot 100 \% = 60 \% \text{ от общего числа голов. Что и требовалось доказать.}$$

б) Пусть число змеев равно x , а общее число голов у них равно y .

Предположим, что какие-то 40 % змеев имеют 80 % голов.

Тогда, поскольку каждый из этих змеев имеет не более трех голов, то $0,8y \leq 3 \cdot 0,4x$.

С другой стороны, поскольку остальные 60 % змеев имеют 20 % голов и у каждого из них не менее одной головы, то $0,6x \leq 0,2y$.

Но эти неравенства не могут выполняться одновременно, так как они равносильны соответственно $8y \leq 12x$ и $12x \leq 4y$.

Поэтому у 40% драконов не может быть 80% голов.

Задание 10 (7 баллов)

За два года купленная новенькая машина подешевела на 64 %. Хозяин очень расстроился, что не может выгодно ее продать. При этом каждый год цена уменьшалась пропорционально и всегда на одно и то же число процентов. На сколько?

Решение.

Пусть за год цена машины снижалась на x %. Приняв исходную стоимость машины за 1, получим, что через год цена машины стала $\alpha = 1 - x/100$, а через два года – α^2 . Отсюда $\alpha^2 = 1 - 0,64 = 0,36$, то есть $\alpha = 0,6$.

Ответ на 40 %



Задание 11 (4 балла)

Найдите все натуральные значения x , при которых выполняется неравенство

$$1 < \frac{x}{6} + \frac{2x}{9} < \frac{17}{8}$$

Ответ. Переведем в обычную дробь $17/8=2$ целых и $1/8$. Можно методом подбора пробовать вычислять с $x=2$.

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{9} = \frac{6+8}{18} = \frac{14}{18} < 1 \text{ не подходит.}$$

Берем $x=3$:

$$\frac{3}{6} + \frac{6}{9} = \frac{9+12}{18} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6} \text{ — подходит}$$

Берем $x=4$:

$$\frac{4}{6} + \frac{8}{9} = \frac{12+16}{18} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$$

— подходит

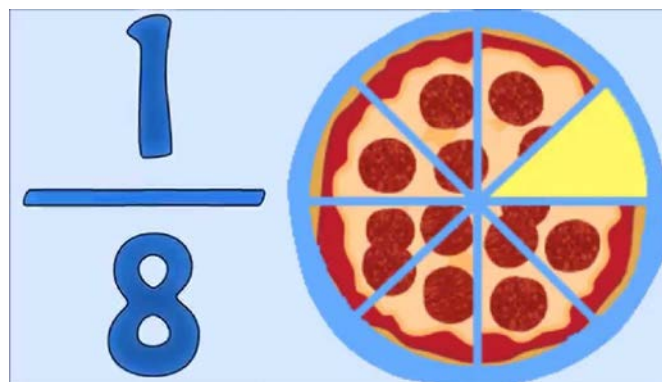
Берем $x=5$:

$$\frac{5}{6} + \frac{10}{9} = \frac{15+20}{18} = \frac{35}{18} = 1\frac{17}{18} \text{ подходит}$$

Берем $x=6$:

$$\frac{6}{6} + \frac{12}{9} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} > 2\frac{1}{8} = \frac{17}{8} \text{ — не подходит.}$$

Ответы. 3; 4; 5



Задача № 12 (5 баллов)

Решите уравнение

$$1+4+7+10+13+\dots+x=176$$

Ответы. Это сумма скольких-то (неизвестно нам n) членов арифметической прогрессии с разностью $d=3$ и первым членом $a_1 = 1$

$$\text{Тогда } 1+4+7+10+13+\dots+x = S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2 + 3(n-1)}{2} n = 176$$

Можно решить квадратное уравнение и получить $n=11$ и $x=1+3*(11-1)=31$

А можно подобрать n , зная, что оно целое и сделать в конце проверку. Например, подобрать таким образом:

$$\frac{1+x}{2} n = 176$$

$$1+x = \frac{176 \cdot 2}{n} = \frac{16 \cdot 11}{n} \cdot 2$$

Здесь вариантов 2:

$$n = 11 \text{ или } n = 16$$

$$x = 31 \text{ или } x = 21$$

При $n=11$ получаем $x = 1+3(11-1)=31$ и сумма равна 176

При $n=16$ получаем $x=1+3(16-1)=46$ и сумма равна $(1+46)/2 * 16 = 47 * 8 = 376$ – Это не подходит значение.

Ответ 31.



Дорогие ребята!

На этом все, спасибо всем.

Пока.

