Задача 1. Сложность: 5

Произведение четырёх последовательных целых чисел равно 840. Найдите все такие числа и докажите, что других вариантов нет.

Ответ: (4,5,6,7 или противоположные числа)

Решение: обозначим второе число за x, тогда произведение чисел равно

(x-1) x (x+1) (x+2) = (x^2+x - 2) (x^2+x)   перемножили крайние и средние

Обозначим x^2+x -1 за y, тогда (y - 1)(y+1) = 840

У^2- 1= 840, значит y^2= 841 , значит y = 29 или -29

Значит, x^2+x -30 = 0 или x^2+x +28 = 0

Первое уравнение имеет два решения: -6 и 5, а второе- не имеет решений в действительных числах.

Задача 2. Сложность: 3.

В каком году мог родиться человек, которому в 2020 году исполнилось столько же лет, какова сумма цифр года его рождения? Найдите все возможные решения.

Ответ: 2009

Решение: Заметим, что максимальная сумма цифр года рождения может быть 9x4 = 36, следовательно, человек не мог родиться ранее, чем в 2020-36= 1984 году.

1 случай: год рождения 19xy, где. x - цифра десятков, y - цифра единиц. Сам год рождения тогда можно записать как 1900+10x+y. Тогда возраст его в 2020 году равен 2020-(1900+10x+y)=1+9+x+y. Отсюда 110=11x+2y. Значит 11(10-x)=2y, т.е. 2y делится на 11, но такое может быть только если y=0, т.к. y - цифра от 0 до 9. Тогда x=10. Противоречие

2 случай: год рождения 20xy, где. x - цифра десятков, y - цифра единиц. Сам год рождения тогда можно записать как 2000+10x+y. Тогда возраст его в 2020 году равен 2020-(2000+10x+y)=2+x+y. Отсюда 18=11x+2y. Значит x- чётная цифра (слева стоит чётное число), не больше чем 1. Значит, x = 0. При этом y = 9

Задача 3. Сложность: 4.

Найдите все такие натуральные числа N, если известно, что из трёх данных утверждений два верно, а одно нет:

1) N + 13 является квадратом натурального числа;

2) Число N делится на 10;

3) N – 2 является квадратом натурального числа.

Ответ: 3, 51

Решение:

Предположим, что утверждение 2- верное. Тогда последняя цифра числа N+13 =3, а числа N- 2 = 8. Ни одно из утверждений 1 и 3 не могут быть при этом верными, так как не существует квадрата натурального числа, оканчивающегося на 3 или 8.

Все возможные квадраты последних цифр числа: 0,1,4,9,16,25,36,49,64,81

Значит, утверждение 2- неверное, а 1 и 3 - верные.

Тогда пусть $a^2=N+13$ $b^2=N-2$ где a,b-натуральные числа, тогда

$a^2-b^2=15$

$(a-b)(a+b)=15$,поскольку множители натуральные, возможно 2 варианта

1) $a-b=3$ и $a+b=5$ отсюда $a=4$ $N=4^2-13= 3$

2) $a-b=1$ и $a+b=15$ отсюда $a=8$ $N=8^2-13 =51$

Значит, возможно два варианта N=3 или N=51

Задача 4. Сложность: 3

Известно, что корейские глаголы kkita, nehta, nohta и puchita все в переводе на русский приблизительно означают "класть", однако есть некоторые различия в их употреблении. Ниже даны выражения на русском, а в скобках указаны корейские глаголы в латинской транскрипции, которые нужно использовать для перевода выражений на корейский язык.

положить книгу в сумку (nehta)

положить очки в футляр (kkita)

поставить тарелку на стол (nohta)

вставить серьгу в ухо (kkita)

положить покупки в корзину (nehta)

повесить фотографию на стену (puchita)

забросить мяч в кольцо (nehta)

приклеить защитную плёнку к экрану телефона (puchita)

постелить покрывало на кровать (nohta)

Задание: Какие корейские глаголы надо использовать при переводе следующих выражений: *наклеить пластырь на рану? надеть на голову шапку? вбить гвоздь в стену? поставить карандаш в стакан? положить ручку в пенал? надеть кольцо на палец ?*

Найдём закономерность в использовании каждого глагола:

Когда речь идёт о контакте поверхностей (касании)

плотно, стабильно – употребляется глагол puchita

неплотно, нестабильно – употребляется глагол nohta

Когда речь идёт о проникновении одного объекта в другой (внутрь)

плотно: - употребляется глагол kkita

неплотно:- употребляется глагол nehta

Ответ:

наклеить пластырь на рану - puchita

надеть кольцо на палец , надеть на голову шапку, вбить гвоздь в стену – kkita

поставить карандаш в стакан – nehta

положить ручку в пенал – nehta или kkita (зависит от пенала)

Задача 5 Сложность: 6.

Из деревень Хахве и Яндон навстречу друг другу одновременно начали движение Нольбу и Хынбу. Нольбу шел пешком, а Хынбу ехал на телеге. Хынбу повстречал Нольбу, посадил его на телегу и довез до Яндон. Далее Хынбу развернулся и поехал в Хахве. Во сколько раз дольше, чем планировал, ехал Хынбу из Яндон в Хахве, если Нольбу добрался из Хахве в Яндон вчетверо быстрее, чем планировал?

Ответ: в 11/4 раза

Решение: За единицу времени возьмем время до их встречи. Поскольку Нольбу потратил две единицы времени на весь путь, а должен был потратить 8 единиц, то есть шёл бы дальше пешком еще 7 единиц времени, делаем вывод, что скорость телеги в 7 раз выше скорости пешехода. За единицу времени возьмем время до их встречи. Хынбу должен был потратить 8/7 единицы, а потратил на 2 единицы больше. Находим соотношение 22/7 : 8/7= 11/4

Задача 6. Сложность: 7.

Ю Джи Ен называет прямоугольный параллелепипед с целочисленными ребрами *почти-кубом, если длины соседних (имеющих общую вершину) ребер отличаются не более чем на 1, но не равны все вместе одному числу.* Например, параллелепипед 10х 11х10 – это почти-куб. Получится ли у Ю Джи Ен найти почти-куб, который можно разрезать на 10 почти-кубиков? Если да- приведите пример, если нет- объясните, почему. (сложнее: существует ли почти-куб, который можно разрезать на 1025 почти-кубиков?)

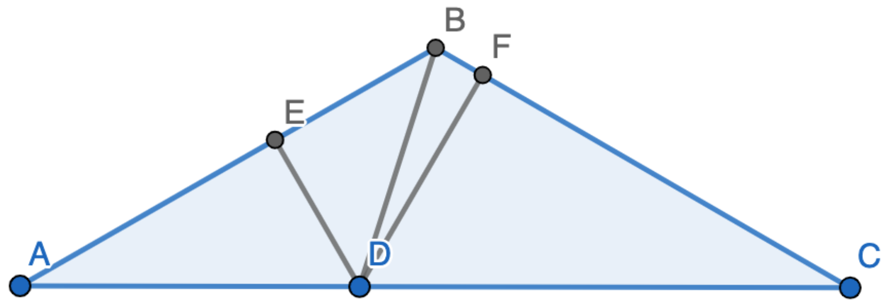
Решение: Возьмем почти-куб 9х9х8. Сверху приклеим к нему 9 почти-кубиков 3х3х2. Получится почти-куб 9х9х10, состоящий из 10 почти-кубиков.

Задача 7. Сложность: 8

В одной маленькой деревне всего три дома, соединённых тремя прямыми дорогами. Самая длинная из этих дорог = 1 км, а длины двух других дорог равны. Две дороги из трёх пересекаются под углом 120 градусов. В деревню приехал новый житель и хочет построить себе дом на самой длинной дороге, но так, чтобы суммарное расстояние от его дома до двух других дорог было максимально велико. Где должен построить свой дом новый житель? Чему равно это максимальное суммарное расстояние? Объясни своё решение.

Ответ: 0,5 км (или 500 м) в любом месте

Решение: Поскольку в равнобедренном треугольнике углы при основании равны- угол 120 градусов может лежать только при вершине, а углы при основании = 30 градусов.



Выберем произвольную точку D (новый дом) на основании AC и опустим из неё перпендикуляры (расстояние от точки до прямой - перпендикуляр) DE и DF на стороны AB и BC соответственно.

По свойству прямоугольного треугольника с углом 30 градусов, ED= 0,5 ADDF= 0,5 DC

ED+DF= 0,5 AC = 500 метров независимо от положения точки D. Значит, сумма расстояний неизменна и равна 500 метров, значит, дом можно строить в любой точке отрезка AC.

Задача 8. Сложность: 4

В сентябре 2022 года состоится Третья Всероссийская Олимпиада АНТОК. Известно, что: в 2021 году количество участников олимпиады возрастёт на n человек, а в 2022 году – ещё на 525 человек. При этом за 2021 год количество участников увеличится на 525%, а за 2022 – увеличится на n %. Сколько человек будет участвовать в Третьей Олимпиаде?

Ответ: 775

Решение: Предположим, что сначала в олимпиаде участвовало m участников. Тогда через год их стало $m + 5{,}25m = 6{,}25m$, откуда $n = 5{,}25m$. Ещё через год участников стало $6{,}25m + 525 = 6{,}25m(1+n/100) = 6{,}25m + {}^{5{,}25}/_{100} \cdot 6{,}25m$, откуда $6{,}25m^2 = 10000$. Значит, $m^2=1600$, $m = 40$ и в 2022 году будет $6{,}25m + 525 = 775$ человек.

Задача 9. Сложность: 6

На тарелке лежит круглая пицца, разрезанная на 4 равных куска в виде секторов. Повар хочет добавить к каждому куску приправу. Сколькими способами он может это сделать, если на кухне есть 8 различных приправ, и на каждый кусочек можно положить любую приправу? Пиццы, совпадающие при повороте тарелки, считайте одинаковыми!

Ответ: 1044 пиццы

Решение: Если не считать пиццы, совпадающие при повороте, одинаковыми, то всего способов будет 8x8x8x8 = 4096

Среди них есть 8 моно-пицц (где все куски с одинаковой приправой), каждую из которых мы посчитали 1 раз.

Также имеется 8x7 = 56 “шахматных’ пицц, в которых ровно две различные приправы, и диагональные куски - с одинаковой приправой. Такие пиццы разбиваются на пары, совпадающие при повороте на 180 градусов, а значит, каждую посчитали дважды.

Осталось 4096 - 8 - 56 = 4096 - 64= 4032 обычных пицц. Каждую из этих пицц мы посчитали 4 раза (каждую пиццу можно повернуть 4 раза). Значит, всего уникальных не шахматных и не моно-пицц 4032: 4 = 1008

Посчитаем теперь все различные пиццы: с одной приправой, шахматные и все остальные: 8 + 56:2 + 4032:4 = 8+28+1008 = 1044

Задача 10. Сложность: 5

В произвольном натуральном числе, состоящем из n разрядов, всеми возможными способами вычеркнули одну цифру. Затем сложили n чисел, которые получились в результате (нули в начале получающегося числа после стирания первой цифры не учитываются, например, из числа 205 получим сумму 5+25+20=50). Может ли полученная сумма оказаться равной 2020?

Ответ: не может.

Решение:

1). При маленьком (до 3) n сумма полученных чисел будет не более $3\times99<2020$.

2). При n большем, чем 4, получим сумму не меньшую $4\times1000>2020$, т. к. получаются, как минимум 4 числа, содержащие не менее 4 цифр (это те числа, в которых первая цифра совпадает с первой цифрой исходного числа).

3). Из четырёхзначного числа $\overline{abcd}$ обязательно должна получиться сумма, кратная 3, т. к.

$$\overline{abc}+\overline{abd}+\overline{acd}+\overline{bcd}=300a+120b+21c+3d$$

Каждое слагаемое делится на 3, а 2020 на 3 не делится. Противоречие