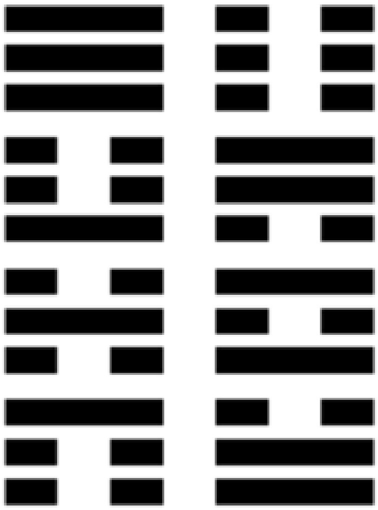
Задача 1. Сложность: 3

Флаг Республики Корея содержит четыре триграммы. Триграмма — особый знак гуа, состоящий из трёх яо — линий, сплошных или прерывистых, расположенных друг над другом. Все возможные комбинации трёх яо образуют восемь триграмм.



А сколько существует комбинаций из пяти яо, расположенных друг над другом?

Ответ: 32

Решение.

Пронумеруем сверху вниз места для расположения яо: 1, 2, 3, 4, 5. На 1 месте может находиться один из двух вариантов яо: ян (сплошная черта) или инь (прерывистая черта). На втором месте после инь может находиться либо ян, либо инь. Т. е. количество вариантов увеличилось в два раза, их стало четыре. На третьем месте после каждого из предыдущих четырёх вариантов может находиться либо ян, либо инь – количество вариантов опять удвоилось, их стало 8. На четвёртом месте после каждого из предыдущих вариантов может находиться либо ян, либо инь – количество вариантов опять удвоилось, их стало 16. На пятом месте после каждого из предыдущих вариантов может находиться либо ян, либо инь – количество вариантов опять удвоилось, их стало 32.

Задача 2. Сложность: 3

Назовём дату неповторимой, если при записи в формате ДД.ММ.ГГГГ в ней нет повторяющихся цифр. Например, дата 28.07.1935 – неповторимая. Дядя Сокчина родился в последнюю прошедшую неповторимую дату. Напиши дату рождения дяди.

Ответ: 25.06.1987.

Решение.

Если месяц 12, то день обязательно 30, а год не содержит цифр 0, 1, 2, 3.

Если месяц не 12, то он обязательно содержит 0 (11 месяц быть не может), а дата либо начинается с 1, либо начинается с 2, либо 31.

Значит, год в любом случае не содержит 0.

Для того, чтобы дата получилась наибольшей, надо сначала найти максимально возможный год, потом в этом году найти максимально возможный месяц, потом в этом месяце найти максимально возможное число.

Найдём максимально возможный год не более 2020, удовлетворяющий условиям задачи. Его запись не содержит 0, значит, это не может быть год 21 века. Максимальный год 20 века, в записи которого используются разные цифры и нет нуля, 1987. Остались неиспользованными цифры 0, 2, 3, 4, 5, 6. Значит, максимальный месяц 06, а день – 25.

Задача 3. Сложность: 4

Римма взяла простое число и стала выполнять вычисления по следующему алгоритму:

Если число было нечётным, Римма прибавляла к нему 3, а если число было чётным, Римма делила его на 4. Далее Римма проводила те же операции над результатом вычислений. Римме удалось три раза проделать вычисления, в результате она получила 34. Какое число было у Риммы изначально?

Ответ: 541.

Решение.

Все простые числа, за исключением 2, нечётные. У Риммы изначально не могло быть число 2, т.к. она не смогла бы проделать над ним указанные операции три раза. Значит, число было нечётным и в первый раз Римма прибавляла к нему 3.

Вариант 1.

Далее мы можем решить задачу с конца, записав в таблицу задом наперёд все возможные операции, которые могла произвести Римма за 3 раза.

После 3 операции	Прибавила 3	Разделила на 4	После 2 операции	Прибавила 3	Разделила на 4	После 1 операции	Прибавила 3	Начальное число	№
34	+		31	+		~~28~~	+	нет	1
					+	124	+	~~121~~	2
34		+	136	+		133	+	~~130~~	3
					+	544	+	541	4

Единственный вариант, при котором изначально у Риммы было простое число, - это 541.

Вариант 2.

Мы можем заметить, что Римма не могла два раза подряд прибавлять 3, потому что после первого прибавления 3 к нечётному числу мы получаем чётное число. Значит, при второй операции Римма делила число на 4. Следовательно, у Риммы были две возможности провести вычисления:

1)$(x+3):4+3=34$ или 2) $(x+3):4:4=34$

Решим оба уравнения:

1)$x=121$ 2)$x=541$

121=11x11 - составное число, 541 – простое число.

Дополнительно полезно убедиться, что 541 – простое число. 541<625=25x25, значит, нам достаточно убедиться, что 541 не делится на простые числа, меньшие 25. При проверке выясняем, что 541 не делится на 3 (по признаку делимости на 3), 5 (по признаку делимости на 5), 7, 11 (по признаку делимости на 11), 13, 17, 19, 23.

Задача 4. Сложность: 4

В классе 25 детей. Среди любых 15 человек есть два мальчика и три девочки. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Ответ: 12 мальчиков и 13 девочек.

Решение.

Если среди любых 15 человек есть два мальчика, значит, девочек может быть не больше 13. Если среди любых 15 человек есть три девочки, значит, мальчиков может быть не больше 12. 12+13=25, значит, в классе 12 мальчиков и 13 девочек.

Задача 5. Сложность: 5

У Артёма есть брусок сыра в виде прямоугольного параллелепипеда, каждая сторона которого длиннее 1 см и составляет целое количество сантиметров. Объём бруска – 385 см^3. Артём отрезал от него для пиццы кубик сыра максимально возможного размера. Каков объём оставшейся части сыра?

Ответ: 260 см^3.

Решение.

Каждая сторона бруска длиннее 1 см и составляет целое количество сантиметров. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин трёх его сторон. 385 можно единственным образом представить в виде произведения трёх целых чисел: 5x7x11=385, значит, брусок имел размеры 5 см x 7 см x 11 см. Самый большой куб, который можно отрезать от такого бруска, имеет размеры 5 см x 5 см x 5 см и объём 5x5x5=125 (см^3). Оставшийся объём сыра 385-125=260 (см^3).

Задача 6. Сложность: 5

В сотах у пчёл живут 10 личинок (см. рисунок). Среди них есть личинки трутней и есть личинки рабочих пчёл, других нет. Личинки трутней всегда лгут, личинки рабочих пчёл всегда говорят правду. Однажды каждая личинка выглянула из своей соты и заявила: «Среди моих соседей личинок рабочих пчёл больше, чем личинок трутней». Сколько трутней в сотах?

Ответ: нисколько.

Решение.

Будем обозначать личинок рабочих пчёл Р, а личинок трутней – Т.

Рассмотрим две центральные клетки. В них могут жить РР, ТТ или РТ.

Рассмотрим случай, когда в центральных ячейках живут РР.

По условию задачи в сотах есть по крайней мере один Т, значит, он живёт с краю. Т солгал, и оставшиеся два соседа этого Т тоже должны быть Т. Их соседи, по той же причине, тоже будут Т, и все личинки, живущие с краю, должны быть Т. В таком случае, Р, живущий в центральной соте, солгал. Возникает противоречие, наше предположение неверно, в центре живут не РР.

Рассмотрим случай, когда в центральных ячейках живут ТТ.

По условию задачи в сотах есть по крайней мере один Р, значит, он живёт с краю. Р сказал правду, и оставшиеся два соседа этого Р тоже должны быть Р. Их соседи, по той же причине, тоже будут Р, и все личинки, живущие с краю, должны быть Р. В таком случае, Т, живущий в центральной соте, сказал правду. Возникает противоречие, наше предположение неверно, в центре живут не ТТ.

Значит, в центре живут РТ. Рассмотрим, кто может жить с краю.

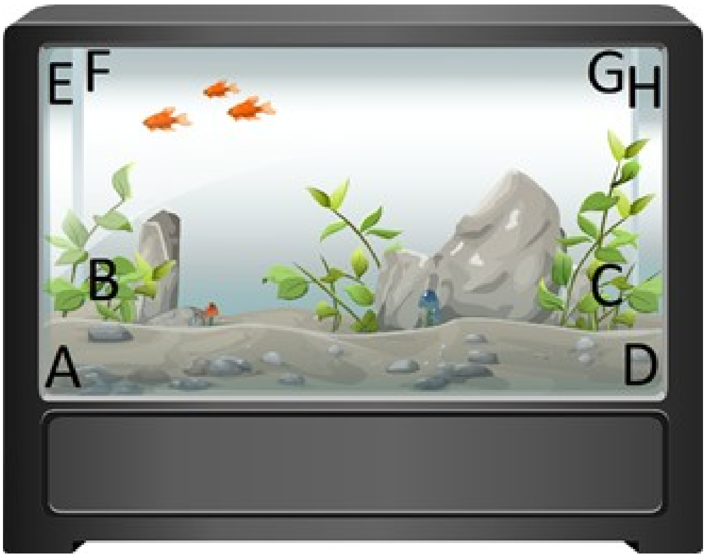
Предположим, что дальний от центра сосед центрального Р – Т. Тогда он солгал, и остальные два его соседа – Т. Тогда у Р, живущего в центре, три соседа – Т, что противоречит условию. Возникает противоречие, наше предположение неверно, и дальний от центра сосед центрального Р должен быть Р.

Тогда остальные два его соседа не могут быть Т, т.к. уже имеют двух соседей Р. По той же причине их соседи – Р. Но тогда и оставшиеся соседи личинок рабочих пчёл, имеющих четырёх соседей, должны быть рабочими пчёлами. И так далее. Получается, что у центрального Т все соседи - Р.

Центральный Т должен был солгать, но он сказал правду. Получаем противоречие. Одновременно личинки рабочих пчёл и трутней в сотах жить не могли.

Задача 7. Сложность: 6

В аквариуме три рыбки играют в прятки с крабом (см. рисунок). Краб прячется в одном из восьми углов аквариума (углы обозначены буквами A, B, C, D, E, F, G, H). Рыбки считают до десяти и одновременно плывут в разные углы аквариума. Если они не нашли краба, рыбки плывут в пещеру и снова считают до десяти. За это время краб переползает в один из соседних (по ребру) углов аквариума. Помогите рыбкам за четыре раза точно найти краба. В решении напишите четыре тройки углов, в которые последовательно поплывут рыбки.



Решение.

Краб переползает в соседний угол по ребру аквариума. Значит, мы можем воспользоваться шахматной раскраской. Раскрасим углы A, C, F, H в чёрный цвет, а углы B, D, E, G – в белый. Тогда краб из белого угла будет переползать обязательно в чёрный, а из чёрного – в белый.

В первый раз рыбки могут проверить, например, три белых угла A, C, F. Если там краба не оказалось, он может быть в чёрном углу или в H.

Предположим, что краб прятался в углу H. Во второй раз рыбки проверят углы D, E, G. Если там краба не оказалось, значит, в самом начале он прятался в чёрном углу и сейчас снова сидит в чёрном.

В третий раз рыбки проверят три чёрных угла – например, B, D, E. Если и теперь не удалось поймать краба, значит, в последний раз он прятался в чёрном углу G.

В четвёртый раз рыбкам следует проверить три соседних с G угла. Даже если рыбкам не повезёт, за четыре раза они точно найдут краба.

Возможны другие варианты решения.

Задача 8. Сложность: 6

Придумайте две правильные несократимые дроби, сумма которых в два раза меньше, чем сумма дробей, которые получаются, если перевернуть каждую из этих дробей.

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$$

Ответ: вариации k/m+m/2k, где k и m взаимно простые, k<m<2k.

Решение.

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$$

$$2\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{ac}$$

$$2ac(ad+bc)=bd(ad+bc)$$
$$ad+bc\neq 0\rightarrow 2ac=bd$$

При этом a и b - взаимно простые, c и d - взаимно простые.

Значит, одно из чисел b и d кратно 2 (пусть это будет d), а в остальном набор простых множителей в составе ac такой же, как в bd.

Если в составе a есть множитель k, то он обязательно есть в составе d. Если в составе c есть множитель m, то он взаимно простой с k и обязательно есть в составе b. Теперь мы знаем по какой схеме построены искомые дроби:

$$2\left(\frac{k}{m}+\frac{m}{2k}\right)=\frac{m}{k}+\frac{2k}{m}$$

, k и m – взаимно простые числа.

Для того, чтобы искомые дроби были правильными, надо, чтобы выполнялось неравенство $k<m<2k$.

Проверим, что равенство выполняется:

$$2\frac{2k^2+m^2}{2mk}=\frac{m^2+2k^2}{mk}$$

Далее можно приводить примеры 2(2/3+3/4)=3/2+4/3 и так далее.

Задача 9. Сложность: 7

В вагоне московского метро едет более 1 и менее 250 человек. Ровно 20% сидят, остальные стоят. Ровно 4% сидящих и ровно 10% стоящих – без масок, остальные – в масках. За проезд в метро без маски взимается штраф 5000 рублей. В вагон зашёл патруль, проверяющий наличие у пассажиров масок. Какую сумму штрафов соберёт патруль?

Ответ: 55 000 рублей.

Решение.

Ровно 20% пассажиров сидят, значит, количество пассажиров кратно 5, а количество сидящих пассажиров меньше 250 чел х 20% = 50 чел.

Ровно 4% сидящих пассажиров – без масок, значит, количество сидящих пассажиров делится на 25. Единственное подходящее количество сидящих пассажиров – 25 человек. В таком случае стоят 25/20х80=100 чел.

4% от 25 – 1 человек.

10% от 100 – 20 человек.

Итого, в вагоне 1+10=11 человек без масок. Патруль соберёт 5000х11=55000 рублей штрафов.

Задача 10. Сложность: 8

Решите уравнение:

$1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 2 : x))=2020.$

Ответ: 4040.

Решение.

Будем решать уравнение с конца.

$$1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 2 : x)) = 2020$$

$$1 : (1 - 1 : (1 - 2 : x)) = -2019$$

$$1 - 1 : (1 - 2 : x) = -1/2019$$

$$1 : (1 - 2 : x) = 2020/2019$$

$$1 - 2 : x = 2019/2020$$

$$2 : x = 1/2020$$

$$x = 4040$$